Interrogation n°6 – Algèbre linéaire (sujet A)

Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition ensembliste de $\operatorname{Ker} f$. Réécrire et compléter : f est $(\dots)$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \dots$

   Cf cours.

2. Soit F et G deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Donner une caractérisation de $E = F \oplus G$. Si E est de dimension finie, que peut-on dire de plus ?

   $E = F \oplus G \iff F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$

   Si E est de dimension finie, on a également :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F + G = E \text{ et } \dim E = \dim F + \dim G \\ &\iff F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim E = \dim F + \dim G \end{aligned}$$

3. Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $s(x, y) = (3x - 4y, 2x - 3y)$. Montrer que s est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

   s étant linéaire, il suffit de montrer que $s^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$s(s(x, y)) = s(3x - 4y, 2x - 3y) = p(X, Y) \qquad \text{avec } X = (3x - 4y, 2x - 3y)$$

   donc

$$\begin{aligned} s(s(x, y)) &= (3X - 4Y, 2X - 3Y) \\ &= (3(3x - 4y) - 4(2x - 3y),\ 2(3x - 4y) - 3(2x - 3y)) \\ &= (9x - 12y - 8x + 12y,\ 6x - 8y - 6x + 9y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

   Ainsi, s est bien une symétrie. Ses éléments caractéristiques sont $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (x, y) \in F &\iff s(x, y) = (x, y) \\ &\iff \begin{cases} 3x - 4y = x \\ 2x - 3y = y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \\ &\iff x - 2y = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y = 0\right\}}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (x, y) \in G &\iff s(x, y) = -(x, y) \\ &\iff (3x - 4y, 2x - 3y) = -(x, y) \\ &\iff \begin{cases} 3x - 4y = -x \\ 2x - 3y = -y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x - y = 0 \end{aligned}$$

   D'où $\boxed{G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - y = 0\right\}}$.

Interrogation n°6 – Algèbre linéaire (sujet B)

Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Donner une définition ensembliste de $\operatorname{Im} f$. Réécrire et compléter : f est $(\ldots)$ si et seulement si $\operatorname{Im} f = \ldots$

   Cf cours.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1, \cdots, u_p \in E$. Rappeler la définition de « $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre » en termes de quantificateurs. Si E est de dimension n, et que la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre, que peut-on dire ?

   $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre si

   $$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K} \quad (\quad \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \quad)$$

   Si E est de dimension n, on a nécessairement $\operatorname{card}((u_1, \cdots, u_p)) = p \leq n$. De plus, si $p = n$, alors la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est une base de E.

3. Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $p(x,y) = (2x-2y, x-y)$. Montrer que p est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

   p étant linéaire, il suffit de montrer que $p^2 = p$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   $$p(p(x,y)) = p(2x-2y, x-y) = p(X,Y) \qquad \text{avec } X = (2x-2y, x-y)$$

   donc

   $$\begin{aligned} p(p(x,y)) &= (2X-2Y, X-Y) \\ &= (2(2x-2y) - 2(x-y),\, 2x-2y-(x-y)) \\ &= (4x-4y-2x+2y,\, 2x-2y-x+y) \\ &= (2x-2y,\, x-y) \\ &= p(x,y) \end{aligned}$$

   Ainsi, p est bien un projecteur. Ses éléments caractéristiques sont $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$. Ainsi,

   $$\begin{aligned} (x,y) \in \operatorname{Ker} p &\iff p(x,y) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x-2y = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \\ &\iff x-y = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x-y = 0\right\}}$. Par ailleurs, $F = \operatorname{Im} p = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; p(x,y) = (x,y)\right\}$, d'où

   $$\begin{aligned} (x,y) \in \operatorname{Im} p &\iff p(x,y) = (x,y) \\ &\iff (2x-2y, x-y) = (x,y) \\ &\iff \begin{cases} 2x-2y = x \\ x-y = y \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y = 0 \\ x-2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x-2y = 0 \end{aligned}$$

   D'où $\boxed{F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x-2y = 0\right\}}$